Практикум из Математике 2 – 30. 6. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме: Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	Сума 1

Сума 1	Сума 2	Сума 3	Сума

Тест траје 45 минута. Сваки задатак вреди 1 бод.

1. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Одредити све вредности параметра $b \in \mathbb{R}$ за које матрица

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & b & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

има највећи ранг.

3. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}\left(3A^{\mathrm{T}}\right) < n$;

(б) $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} = n \Rightarrow \det\,(5A) \neq 0$;

(в) $\operatorname{rang} A = 0 \Rightarrow \det A^{\mathrm{T}} = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

4. У зависности од вредности параметра $c \in \mathbb{R}$, одредити ранг матрице

$$C = \begin{bmatrix} 2 & c & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) за све матрице A и B истог реда важи $\operatorname{rang}\,(A \cdot B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$;

(б) заменом места двема врстама матрице, њен ранг се не мења;

(в) за произвољну регуларну матрицу C важи $\operatorname{rang}\left(5\,C^{-1}\right) = 5^{-1} \operatorname{rang} C$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

6.	7.	8.	9.	10.	Сума 2

6. Нека је M реална квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) матрица M има n различитих сопствених вредности;
(б) минимални полином матрице M је степена n;
(в) карактеристични полином матрице M је степена n;
(г) све нуле карактеристичног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног минималног полинома исте вишеструкости;
(д) све нуле минималног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног карактеристичног полинома;
(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ тако да производ сопствених вредности матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a-3 \\ 2 & a+3 & 7 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

буде једнак -4.

9. Одредити све вредности параметра $b \in \mathbb{R}$ тако да једна сопствена вредност матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & b-3 \\ 2 & b+3 & 7 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

буде једнака 3.

10. Одредити сопствене векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.	12.	13.	14.	15.	Сума 3

11. Написати једначину равни α која је паралелна равни $\beta : y = 0$ и садржи тачку $A(1,-1,3)$.

12. Заокружити слова испред тврђења која важе за векторе $\vec{a} = (1,2,3)$ и $\vec{b} = (-2,1,0)$:

(а) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су ортогонални;

(б) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни;

(в) за векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right] = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

13. Дати су вектори $\vec{c} = (1,2,3)$ и $\vec{d} = (-2,1,0)$. Израчунати:

(а) $\vec{d} \circ \vec{c}$;

(б) $\angle\left(\vec{d},\vec{c}\right)$;

(в) $\left[\vec{c},\vec{d},\vec{c}\right]$.

14. У $\mathbb{R}^3$ дате су права $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z-3}{3}$, $y = 6$, и раван $\gamma : x + 3z + 6 = 0$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) права p је паралелна са равни γ;

(б) права p лежи у равни γ;

(в) права p има тачно једну заједничку тачку са равни γ;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

15. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) вектор $(0,1,0)$ је нормалан на раван xOz;

(б) вектор нормале равни xOz је $(1,1,0)$;

(в) оса Oy је паралелна са равни $y = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

– Решења –

1. Приметимо да ранг дате матрице A може бити једнак највише 2. Ако колоне матрице A посматрамо као векторе $\overrightarrow{k_1} = (4, 2, 1, -1)$ и $\overrightarrow{k_2} = (2, 1, 1, 3)$, можемо приметити да су они линеарно независни, одакле следи да је ранг матрице A једнак 2.

2. Детерминанта матрице B једнака је $\det B = 3\,(b-4)$, одакле директно закључујемо да је ранг матрице B највећи у случају када је $b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ и тада је $\operatorname{rang} B = 3$.

3.

(а) Матрица A је квадратна и реда n, па је њен максималан ранг управо једнак n и то је само у случају када је матрица A регуларна, односно када је $\det A \neq 0$. Ако је $\det A = 0$, аутоматски следи да је $\operatorname{rang} A < n$. С обзиром на то, као и на то да важи $\operatorname{rang}\left(3A^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rang} A$, следи тачност тврђења под **(а)**.

(б) Имајући у виду дискусију под **(а)**, лако закључујемо да је ово тврђење такође тачно.

(в) Ранг матрице је једнак нули само када је та матрица једнака нула матрици. За сваку квадратну матрицу A важи $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$. Из $\operatorname{rang} A = 0$ следи $A = \mathbb{O}_{n\times n}$, па самим тим и $\det A^{\mathrm{T}} = \det A = 0$. Следи, тврђење под **(в)** је тачно.

Дакле, тачна су тврђења под **(а)**, **(б)** и **(в)**.

4. Множењем елемената друге врсте са -2 и додавањем одговарајућим елементима прве врсте, добијамо

$$C = \begin{bmatrix} 2 & c & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & c-4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основу тога закључујемо да је $\operatorname{rang} C = 2$ за свако $c \in \mathbb{R}$.

5.

(а) Нека је $A = B = \mathbb{I}_{n\times n}$. Тада је $\operatorname{rang}(A \cdot B) = \operatorname{rang} \mathbb{I}_{n\times n} = n$, а $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = 2n$. На основу тога закључујемо да тврђење под **(а)** није тачно.

(б) Замена места двема врстама матрице је једна од елементарних трансформација те матрице. Како елементарне трансформације не мењају ранг матрице, следи да је тврђење под **(б)** тачно.

(в) За произвољну регуларну матрицу C важи $\operatorname{rang}\left(5C^{-1}\right) = \operatorname{rang}\left(C^{-1}\right) = \operatorname{rang} C$. Закључујемо да тврђење под **(в)** није тачно.

Дакле, тачно је тврђење под **(б)**.

6.

(а) Сопствене вредности матрице M су нуле њеног карактеристичног полинома. Карактеристични полином матрице M је полином $\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$ и степена је n, па има n (не обавезно различитих!) нула. Према томе, матрица M има n сопствених вредности које не морају бити различите.

(б) Минимални полином $\mu_M(\lambda)$ матрице M је монични полином најнижег степена који матрица M анулира. Минимални полином матрице M дели карактеристични полином. Минимални полином матрице M је полином степена мањег или једнаког n.

(в) Карактеристични полином матрице M је полином степена n.

(г) Минимални и карактеристични полином имају исте нуле. Уколико је степен минималног полинома матрице M мањи од n, онда постоји нула која има мању вишеструкост као нула минималног полинома него као нула карактеристичног полинома.

(д) Све нуле минималног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног карактеристичног полинома.

Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

7. Карактеристични полином матрице A јесте

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).\end{aligned}$$

Минимални полином је монични полином најнижег степена који матрица A анулира. Минимални полином матрице A има исте факторе као и њен карактеристични полином, истог или нижег реда. Према томе, конкуренти за минимални полином матрице A су полиноми $\mu_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)$ и $\mu_2(\lambda) = -\varphi_A(\lambda)$. Како је

$$\mu_1(A) = (A - I_3)(A - 3I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

закључујемо да је $\mu_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)$ минимални полином матрице A.

8. Производ сопствених вредности матрице једнак је њеној детерминанти. Детерминанта матрице A једнак је $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & a-3 \\ 2 & a+3 & 7 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\,(a+3-8) = a\,(a-5)$. Како је, према услову задатка, производ сопствених вредности једнак -4, имамо да је $\det A = -4$, односно $a^2 - 5a = -4$, тј. $a^2 - 5a + 4 = 0$, одакле закључујемо да је $a = 1$ или $a = 4$.

9. Сопствене вредности матрице A су нуле карактеристичног полинома

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & b-3 \\ 2 & b+3-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & b+3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (b-\lambda)[(1-\lambda)(b+3-\lambda) - 8] = (b-\lambda)(\lambda^2 - (b+4)\lambda + b + 3 - 8) \\ &= -(\lambda - b)\left(\lambda^2 - (b+4)\lambda + b - 5\right).\end{aligned}$$

Како је 3 сопствена вредност матрице A и како су сопствене вредности нуле карактеристичног полинома имамо да је $(3-b)\left(3^2 - 3(b+4) + b - 5\right) = 0$, односно $b = 3$ или је $-2(b+4) = 0$. Одакле закључујемо да за $b = 3$ или $b = -4$ важи да је 3 сопствена вредност матрице A.

10. Сопствене вредности матрице A су нуле њеног карактеристичног полинома

$$\varphi_A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

Према томе, сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Сопствени вектори матрице који одговарају сопственој вредности $\lambda_1 = 1$ су нетривијална решења матричне једначине $A \cdot X = 1 \cdot X$, тј. једначине $(A - I_2) \cdot X = \mathbb{O}_{2\times 1}$, односно једначине

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Добијамо да је $x_1 + x_2 = 0$, тј. да је $x_1 = -x_2$ и да су сопствени вектори матрице A дати са $X = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сопствени вектори матрице који одговарају сопственој вредности $\lambda_2 = 3$ су нетривијална решења матричне једначине $A \cdot X = 3 \cdot X$, тј. једначине $(A - 3I_2) \cdot X = \mathbb{O}_{2\times 1}$, односно једначине

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Једноставно добијамо да је $x_1 = x_2$ и да су сопствени вектори матрице A дати са $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11. Из услова да је раван α паралелна равни $\beta : y = 0$, закључујемо да је вектор нормале те равни, у ознаци $\overrightarrow{n_\alpha}$, колинеаран са вектором нормале равни β, у ознаци $\overrightarrow{n_\beta}$. Без губитка општости, можемо узети да је $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} = (0, 1, 0)$. С обзиром на то, као и на услов да раван α садржи тачку $A\,(1, -1, 3)$, следи да је једначина равни α управо $y = -1$.

12.

(а) Како је $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, следи да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесу ортогонални, па је тврђење под **(а)** тачно.

(б) С обзиром на део под **(а)**, следи да тврђење под **(б)** није тачно.

(в) За свака два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\right] = 0$, одакле закључујемо да је тврђење под **(в)** тачно.

Дакле, тачна су тврђења под **(а)** и **(в)**.

13. Сви резултати у овом задатку се добијају директно из претходног задатка.

(а) $\vec{d} \circ \vec{c} = \vec{c} \circ \vec{d} = 0$.

(б) Из $\vec{c} \circ \vec{d} = 0$, следи да је $\angle\left(\vec{d}, \vec{c}\right) = \pi/2$.

(в) $\left[\vec{c}, \vec{d}, \vec{c}\right] = 0$.

14. Вектор праве p је једнак вектору нормале равни γ, односно $\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{n_\gamma} = (1, 0, 3)$. С обзиром на то, закључујемо да је права p нормална на раван γ.
Дакле, тачно је само тврђење под **(в)**.

15.

(а) Ово тврђење је тачно, јер је вектор нормале равни xOz управо $(0, 1, 0)$.

(б) Ово тврђење није тачно, јер је тачно тврђење под **(а)**.

(в) Вектор правца осе Oy је $(0, 1, 0)$, што је управо и вектор нормале равни $y = 0$ (то је управо раван xOz). Следи да је оса Oy нормална на раван $y = 0$, па тврђење под **(в)** није тачно.

Дакле, тачно је само тврђење под **(а)**.